Résistance des matériaux
Hypothèses – Sollicitations - Contraintes

1- Hypothèses générales

11- Hypothèses sur le matériau

Continuité : les dimensions des structures internes des métaux étant très petites par rapport aux plus petites dimensions que nous aurons à utiliser : nous considérerons que la matière est continue.

Homogénéité : on admettra que tous les éléments du matériau, aussi petits soient-ils, ont une structure identique. Cette hypothèse peut sembler proche de la réalité pour les métaux mais est très grossière pour le béton par exemple

Isotropie : On admettra qu'en tous les points et dans toutes les directions autour de ces points, les matériaux possèdent les mêmes propriétés mécaniques.

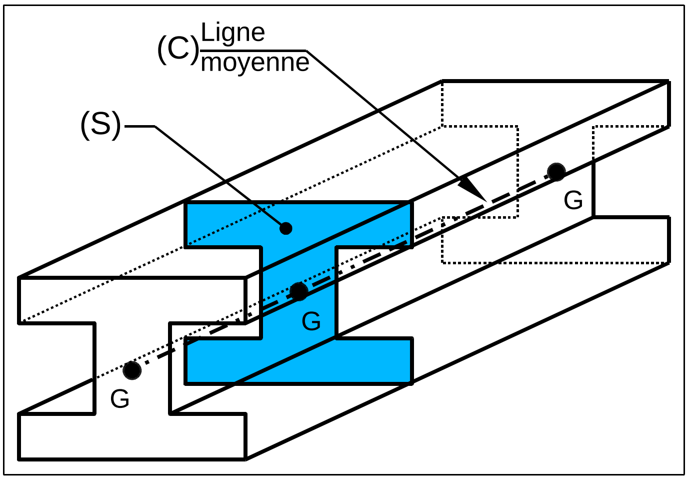
12- Hypothèses sur la disposition de la matière

Nous étudierons uniquement des solides dont les formes sont relativement simples. Si cela est nécessaire, elles sont schématisées dans un but de simplification.
Les solides que nous étudierons admettront donc :

- des axes de symétrie,
- une dimension principale,
- des dimensions transversales variant de façon continue.

La poutre
On appelle poutre (figure ci-dessous), un solide engendré par une surface plane (S) dont le centre de surface G décrit une courbe plane (C) appelée ligne moyenne. Les caractéristiques de la poutre sont :

- ligne moyenne droite ou à grand rayon de courbure,
- section droite (S) constante ou variant progressivement
- le plan de (S) reste perpendiculaire à (C)
- grande longueur par rapport aux dimensions transversales
- existence d'un plan de symétrie
- etc

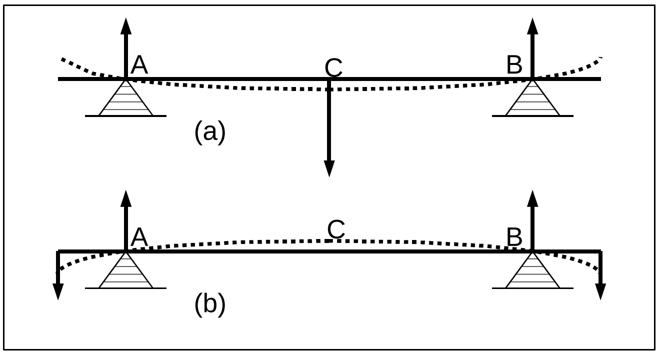


13- Hypothèses sur les forces extérieures

Plan de symétrie. Les forces extérieures seront situées dans le plan de symétrie de la poutre ou alors disposées symétriquement par rapport à ce plan.

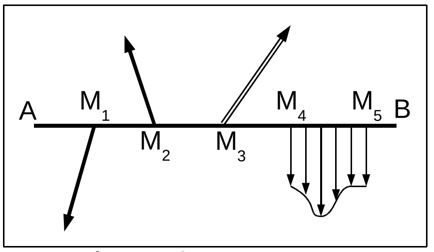
Points ou zones d'application des forces. A partir du moment où on envisage un calcul de résistance ou de déformation, il n'est plus possible de remplacer un système de forces extérieures par un système équivalent.

Exemple : *Sur une poutre reposant sur deux appuis en A et B, les deux systèmes de chargements (a) et (b) sont équivalents mais ne provoquent pas la même déformation.*

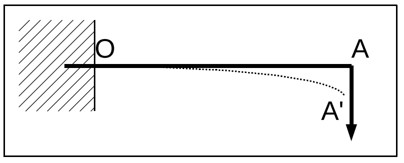


Types d'actions mécaniques extérieures. Deux types d'actions mécaniques peuvent s'exercer sur la poutre :

- charges concentrées : $(M_1, \vec{F_1})$, $(M_2, \vec{F_2})$ ou moments $(\vec{M_{M_3}})$
- charges réparties sur M_4M_5. Cette charge est définie par sa densité linéique, ou coefficient de charge p, exprimée en newtons par mètre.

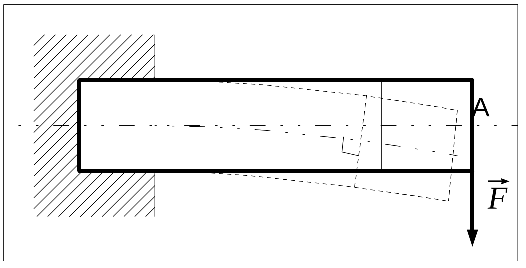


Les déformations étant petites devant les dimensions de la poutre, les actions s'exerçant sur celle-ci seront donc calculées à partir du principe fondamental de la statique ou de la dynamique du solide indéformable.
De même, les supports des forces appliquées ne seront pas déplacés lors de la déformation de la poutre.



14- Hypothèses sur les déformations

Hypothèse de Navier et Bernoulli. Les sections planes normales aux fibres avant déformation demeurent planes et normales aux fibres après. Cette hypothèse, valable dans les sollicitations simples, n'est qu'assez grossièrement approchée dans les sollicitations composées.



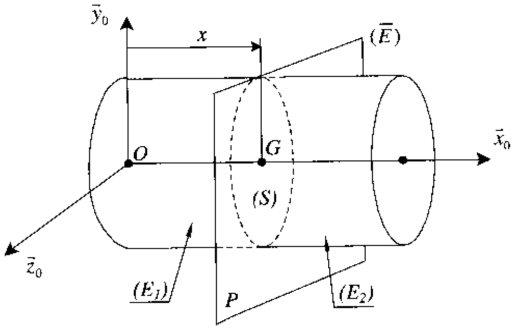
Hypothèse de Barré de Saint-Venant. Les résultats obtenus en résistance des matériaux ne s'appliquent valablement qu'à une distance suffisamment éloignée de la région d'application des efforts concentrés. Cette restriction, très importante pour ce qui concerne la répartition locale des contraintes, n'a qu'un effet négligeable pour la détermination des déformations globales.

2- Torseur de cohésion

21- Définition de la coupure fictive

On désigne par (E) la poutre étudiée et par $(\overline{E})$ le milieu extérieur à (E). Le repère $R_0=(O,\vec{x_0},\vec{y_0},\vec{z_0})$ est un repère lié à (E).

Ce repère R_0 est tel que son axe $(O,\vec{x_0})$ est confondu avec la ligne moyenne de la poutre.



Le plan (P) perpendiculaire à $(O,\vec{x_0})$.

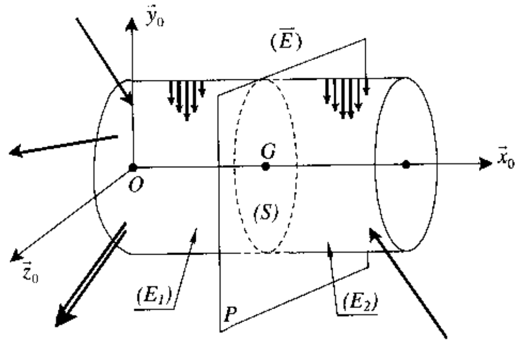
Soit *G*, d'abscisse x, le centre de la surface de (S). $\overrightarrow{OG}=x\cdot\vec{x_0}$ définit la position de la section droite fictive (S).

Cette coupure par le plan (P) partage la poutre (E) en deux tronçons (E_1) et (E_2).

On convient, pour étudier les sollicitations, que (E_1) est le tronçon dont le volume augmente lorsque x augmente. (E_2) est l'autre tronçon.

22- Définition du torseur de cohésion

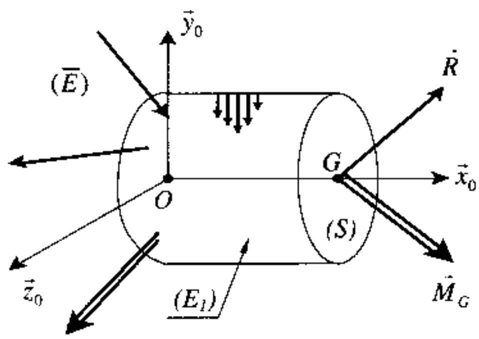
Les actions mécaniques que le tronçon (E_2) exerce sur le tronçon (E_1) à travers la section droite fictive (S) sont des efforts intérieurs à la poutre (E) qui peuvent être modélisés par le torseur de cohésion $\{T_{coh}\}$ qui s'écrit réduit au point *G* : $\{T_{coh}\}=\left\{\begin{matrix}\vec{R}\\ \overrightarrow{M_G}\end{matrix}\right\}_G$



23- Eléments de réduction en G

Le tronçon de poutre (E_1) est en équilibre sous l'action :

- du milieu extérieur $(\overline{E}\to E_1)$ qui est représenté par un torseur qui peut écrire : $\{T(\overline{E}\to E_1)\}=\left\{\begin{matrix}\vec{R}(\overline{E}\to E_1)\\ \overrightarrow{M_G}(\overline{E}\to E_1)\end{matrix}\right\}_G$
- du tronçon (E_2) sur (E_1) à travers la section droite (S) qui est appelé torseur de cohésion $\{T_{coh}\}=\left\{\begin{matrix}\vec{R}\\ \overrightarrow{M_G}\end{matrix}\right\}_G$



$$\vec{R}=-\vec{R}(\overline{E}\to E_1) \quad \text{ou} \quad \vec{R}=\vec{R}(\overline{E}\to E_2)$$
$$\overrightarrow{M_G}=-\overrightarrow{M_G}(\overline{E}\to E_1) \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{M_G}=\overrightarrow{M_G}(\overline{E}\to E_2)$$

Démonstration :

On peut écrire le principe fondamental de la statique :

$$\vec{R}(\overline{E}\rightarrow E_1)+\vec{R}=\vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{R}=-\vec{R}(\overline{E}\rightarrow E_1)$$

$$\overrightarrow{M_G}(\overline{E}\rightarrow E_1)+\overrightarrow{M_G}=\vec{0} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{M_G}=-\overrightarrow{M_G}(\overline{E}\rightarrow E_1)$$

On montre de même que :

$$\vec{R}=\vec{R}(\overline{E}\rightarrow E_2)$$

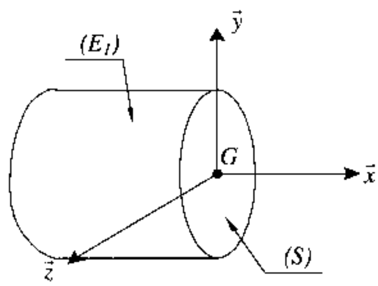
$$\overrightarrow{M_G}=\overrightarrow{M_G}(\overline{E}\rightarrow E_2)$$

24-Repère de définition des sollicitations

On définit un repère $R=(G,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ lié à la section (S) .

Ce repère est tel que :

- $(G,\vec{x})$ définit la normale extérieure à (E_1) en G,
- $(G,\vec{y})$ et $(G,\vec{z})$ appartiennent au plan de la section droite (S) . $(G,\vec{y})$ est porté par l'axe de symétrie de de la section (S) .



25- Projection dans $R=(G,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ des éléments de réduction du torseur de cohésion

On rappelle que l'écriture du torseur de cohésion : $\{T_{coh}\}=\left\{\begin{matrix}\vec{R}\\ \overrightarrow{M_G}\end{matrix}\right\}_G$

On projette dans R ses éléments de réduction, soit :

$$\{T_{coh}\}=\left\{\begin{matrix}\vec{R}\left|\begin{matrix}N\\T_y\\T_z\end{matrix}\right. \\ \overrightarrow{M_G}\left|\begin{matrix}M_t\\M_{fy}\\M_{fz}\end{matrix}\right.\end{matrix}\right\}_{G\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \quad \text{soit :} \quad \begin{matrix}\vec{R}=N\vec{x}+T_y\vec{y}+T_z\vec{z}\\ \overrightarrow{Mg}=M_t\vec{x}+M_{fy}\vec{y}+M_{fz}\vec{z}\end{matrix}$$

– N	:	Effort normal (induit la traction)
– T_y	:	Effort tranchant sur $\vec{y}$ (induit le cisaillement)
– T_z	:	Effort tranchant sur $\vec{z}$ (induit le cisaillement)
– M_t	:	Moment de torsion
– M_{fy}	:	Moment de flexion sur $\vec{y}$
– M_{fz}	:	Moment de flexion sur $\vec{z}$

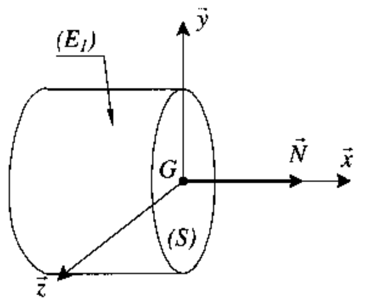
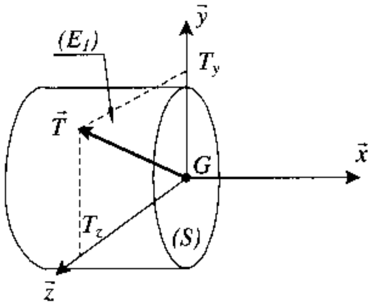
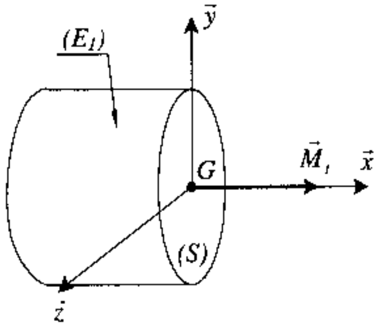
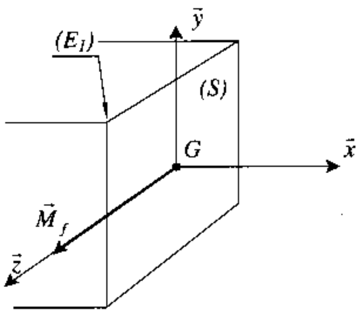
26- Relation entre effort tranchant et moment de flexion

On montre que : $\dfrac{dM_{fy}}{dx}=T_y \quad et \quad \dfrac{dM_{fz}}{dx}=T_z$

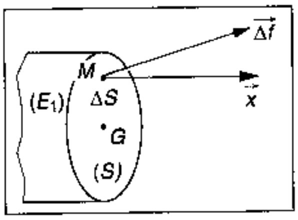
Ces relations permettent de vérifier la cohérence entre l'expression des fonctions ou leurs diagrammes respectifs.

3- Définition des sollicitations simples

Si les éléments de réduction en G du torseur des efforts de cohésion $\{T_{coh}\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{R} \\ \overrightarrow{M_G} \end{matrix} \right\}_G$ font apparaître un seul les quatre éléments $\vec{N}$, $\vec{T}$, $\overrightarrow{M_t}$, $\overrightarrow{M_f}$ non nuls, la sollicitation est dite simple.

Croquis	***Définition***	***Torseur habituellement associé***
	si N > 0 : **extension** si N < 0 : **compression** $\vec{N} \neq 0 \quad \overrightarrow{M_t} = 0$ $\vec{T} = 0 \quad \overrightarrow{M_f} = 0$	$T(L_{coh}) = \left\{ \begin{matrix} N & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\}_G$
	**Cisaillement** $\vec{N} = 0 \quad \overrightarrow{M_t} = 0$ $\vec{T} \neq 0 \quad \overrightarrow{M_f} = 0$	$T(L_{coh}) = \left\{ \begin{matrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\}_G$
	**Torsion simple** $\vec{N} = 0 \quad \overrightarrow{M_t} \neq 0$ $\vec{T} = 0 \quad \overrightarrow{M_f} = 0$	$T(L_{coh}) = \left\{ \begin{matrix} 0 & M_t \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\}_G$
	**Flexion simple** $\vec{N} = 0 \quad \overrightarrow{M_t} = 0$ $\vec{T} \neq 0 \quad \overrightarrow{M_f} \neq 0$ Rq : si M_f est nul ou négligeable il s'agit de : **Flexion pure**	$T(L_{coh}) = \left\{ \begin{matrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & M_{fz} \end{matrix} \right\}_G$ Rq : si M_{fz} est nul ou négligeable

4- Vecteur contrainte en un point



Les efforts de cohésion qui ont été définis plus haut, sont des actions mécaniques que le tronçon (E_1) exerce sur le tronçon (E_2) à travers la section droite (S) de la coupure fictive. Ces actions sont réparties en tous points de (S) suivant une loi a priori inconnue. Notons $\overrightarrow{\Delta f}$ l'action mécanique au point *M* et ΔS l'élément de surface entourant ce point. Soit $\vec{x}$ la normale issue de *M* au plan de la section (S), orientée vers l'extérieur de la matière du tronçon (E_1).

41- Définition de la contrainte

On appelle vecteur contrainte au point *M* relativement à l'élément de surface ΔS orienté par sa normale extérieure $\vec{x}$, le vecteur noté $\vec{C}(M,\vec{x})$ tel que :

$$\vec{C}(M,\vec{x}) = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta f}}{\Delta S} = \frac{\overrightarrow{df}}{dS}$$

42- Unité

D'après la relation ci-dessus, il apparaît que la dimension d'une contrainte est celle du rapport d'une force par une surface : $\|\vec{C}(M,\vec{x})\| = \left\|\frac{\overrightarrow{df}}{dS}\right\|$

Dans le système légal, l'unité de contrainte est le pascal : 1 Pa = 1 N/mm²

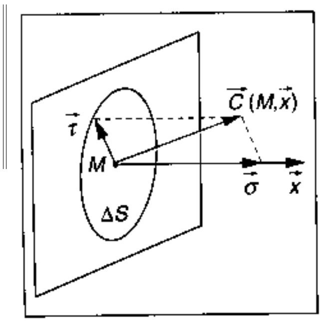
Cependant l'unité usuelle est résistance des matériaux est le méga-pascal (Mpa).

$$1\ Mpa = 10^6 Pa \quad 1\ MPa = 1\ N/mm^2 \quad 1\ MPa \sim 10\ bars$$

43- Contrainte normale, contrainte tangentielle

La contrainte est une grandeur vectorielle. Sa direction est généralement différente de cette de la normale extérieure $\vec{x}$. Pour des raisons de commodité de calcul, il est fréquent de projeter le vecteur contrainte sur deux directions.

Définition :



–On appelle **contrainte normale** $\vec{\sigma}$, la projection de $\vec{C}(M,\vec{x})$ sur la normale $\vec{x}$

–On appelle **contrainte tangentielle** $\vec{\tau}$, la projection de $\vec{C}(M,\vec{x})$ sur le plan de l'élément de surface ΔS

Donc : $\vec{C}(M,\vec{x}) = \vec{\sigma} + \vec{\tau}$